物理數學

積分

趙臨軒老師

Outline

- Σ的意義
- 區間分割
- 定積分的定義
- *不定積分的性質*

Σ的意義

- 數學上一連續數列相加的和，可以用Σ表示

$$\Sigma a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$

Σ基本性質-四則運算

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n} = n \qquad \sum_{i=1}^{n} (ka_i) = k(\sum_{i=1}^{n} a_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k+k+k+\cdots+k}_{n} = nk \qquad \sum_{i=1}^{n} (k_1a_1 + k_2b_i) = k_1(\sum_{i=1}^{n} a_i) + k_2(\sum_{i=1}^{n} b_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = (\sum_{i=1}^{n} a_i) \pm (\sum_{i=1}^{n} b_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_ib_i) \neq (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i-1}^{n} b_i)$$

例題 1

$$\sum_{i=1}^{n} (3i+2)(2i^2+5i-1)$$

區間分割

- 區間[a,b] 的分割是把區間，劃分為幾個子區間。
- 若 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ 均為區間[a,b]內的實數，而且有

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- 則稱我們把區間[a,b] 分割為個子區間

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

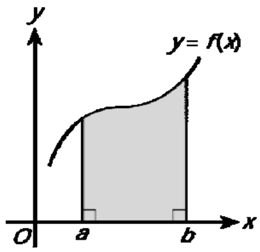
區間分割-正則分割

- 若每一子區間有相同的長度，則稱其分割爲正則分割

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots\cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$$

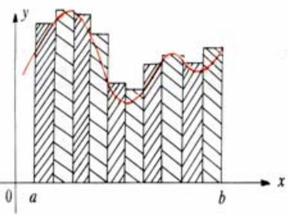
定積分的定義

- 假若函數f(x)在區間[a,b]內爲連續函數，則我們將求此函數圖形在區間[a,b]內與軸所圍成區域的面積



定積分的由來

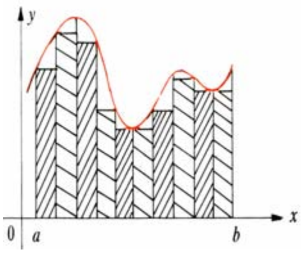
- 因f(x)在[a,b]內爲連續，我們可在 n個子區間[x_{i-1},x_i] 內各擇取一實數 u_i，
- u_i 爲[x_{i-1},x_i] 內的最大值
- 則我們可以作 n個矩形，且高爲$f(u_i)$
- 放在一起形成一個矩形多邊形



$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x$$

定積分的由來

- 因f(x)在[a,b]內爲連續，我們可在 n個子區間[x_{i-1},x_i] 內各擇取一實數 u_i，
- u_i 爲[x_{i-1},x_i] 內的最小值
- 則我們可以作 n個矩形，且高爲$f(u_i)$
- 放在一起形成一個矩形多邊形

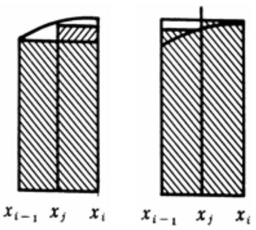


$$m(x) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x$$

定積分的由來

- 很顯然地，y=f(x) 函數 圖形在區間 [a,b] 內與x軸所圍成的面積必定介於 m(x)與M(X) 之間，即

$$m(x) \le A \le M(x)$$



定積分的由來

- 若函數在區間[a,b] 內爲連續，取

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad n \to \infty \qquad \Delta x \to 0$$

- 函數圖形在區間[a,b] 內與軸所圍成的區域面積爲

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

定積分的由來

- 當

$n \to \infty$

$\Delta x \to 0$

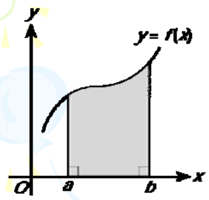
$dx \cong \Delta x$

- 積分符號

$$\int_a^b \cong \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$$

- 表示求和的觀念再加上極限（即一再切割區間[a,b]的觀念）

定積分



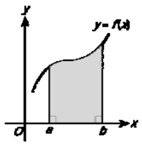
- x稱爲積分變數且
- f(x)稱爲（被）積分函數
- 實數a稱爲積分下限
- 實數b稱爲積分上限

$$A=\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

定積分的幾何解釋

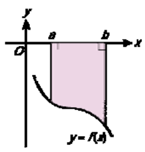
若 $y=f(x)$ 是閉區間 $a\le x\le b$ 內的非負值連續函數，則

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ 圖中陰影部份的面積。



若 $y=f(x)$ 是閉區間 $a\le x\le b$ 內非正值連續函數，則

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -$(圖中陰影部分的面積)。



定積分的性質

若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 是閉區間 $a\le x\le b$ 上的兩個連續函數，則以下性質成立：

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 k 爲實常數
4. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

*5. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $a\le c\le b$

不定積分的定義

- 若F(x)爲f(x) 的原函數

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x)] = f(x)$$

- 則 f(x) 的不定積分可記爲

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$$

常用的積分公式

1. $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\ne -1$
2. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
3. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
4. $\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$
5. $\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
6. $\int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$
7. $\int \csc x \cdot \cot x \cdot \mathrm{d}x = -\csc x + C$

不定積分的性質

定理 1

$\int k f(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$，其中 k 爲一非零常數。

定理 2

$\int[f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$

例題

試求 $\int \frac{x^5 - 4x^3 + 2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

物理學上的應用

考慮質點在直線上的運動。若給出時間 t 與質點的位移 s 的公式，則質點於時間 t 的速度 v 與加速度 a 可通過微分法確定，

即 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$

相反，若給出質點於時間 t 的 v 或 a， 則 s 或 v 可分別通過微分法的逆運算——積分法而確定。

$$s = \int v\,\mathrm{d}t$$

$$v = \int a\,\mathrm{d}t$$

例題

一質點以 $a = (4t - 3)\,\mathrm{ms}^{-2}$ 的加速度沿一直線運動，其中 t 秒爲質點經過 O 點後的時間。當 $t = 1$ 時，質點的速度爲 $2\,\mathrm{ms}^{-1}$。

試求

(a) 當 $t = 3$ 時，質點的速度；

(b) 當 $t = 3$ 時，質點相對 O 點的位移。