

物理數學

簡易微分

趙臨軒老師

國立台東高中 1

□導函數-補充-數學工具

- 定義：假設原函數關係式，而為另一函數，若在之定義中之任一點 $x=a$ 處之導數恰為，則稱為的導函數

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

- 記號：
- 導函數通常表示成

$$f(x) \quad f'(x) \quad \frac{d f(x)}{d(x)}$$

國立台東高中 2

導數的幾何意義 (續)

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2005.11.02. 04 微積分(上) 授課講義 國立台東高中 3

導數的幾何意義 (續)

- 事實上，當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時，在 $[x, x + \Delta x]$ 區間的函數曲線可以直線段近似之（如右圖），而此直線段的斜率就是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- 這個說明也告訴我們可如何求取斜率的逼近值

2005.11.02. 04 微積分(上) 授課講義 國立台東高中 4

範例說明

- 對於函數 $y = f(x) = 5^x$

如果我們想求取函數在 $x = 0$ 點上的斜率，我們可把該點附近的圖放大，直到看起來像是直線

近似斜率為 $\frac{1.0405 - 0.96282}{0.024571 - (-0.02303)} = 1.63$

正確值為 1.609...

2005.11.02. 04 微積分(上) 授課講義 國立台東高中 5

多項式-微分公式

$$f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

國立台東高中 6

第n 階導函數

- 第一次導函數→

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

- 第二次導函數→

$$y'' = f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \Rightarrow y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

- 其他依序類推

- 可微分：由求的計算過程，我們稱為將**函數微分**

國立台東高中

7

導函數在運動學中的應用

$$x = f(t) \xrightarrow[\text{反導函數 (升階)}]{\text{導函數 (降階)}} v = \frac{d f(t)}{d t} \xrightarrow[\text{反導函數 (升階)}]{\text{導函數 (降階)}} a = \frac{d v}{d t} = \frac{d}{d t} \cdot \frac{d f(t)}{d t} = \frac{d^2 f(t)}{d^2 t}$$

國立台東高中

8

導函數在運動學中的應用

$$x(t) \xrightarrow[\text{求切線斜率}]{\text{微分}} v(t) \xrightarrow[\text{求切線斜率}]{\text{微分}} a(t)$$

$$a(t) \xrightarrow[\text{求面積}]{\text{積分}} v(t) \xrightarrow[\text{求面積}]{\text{積分}} x(t)$$

運動狀態 函數	等速度運動	等加速度運動
x (t)	$x = x_0 + v_0 t$	$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
v (t)	$v = v_0$ (定值)	$v(t) = v_0 + a t$
a (t)	$a = 0$	$a = \text{常數}$

次方少1
次方少1

國立台東高中

9

例題8：多項式微分-基本題

- 運動的位置與時間關係為 $x = 5 + 4t - 2t^2$ (MKS制)，求：(1)初速度 (2)加速度 (3)最遠的正向位置為何？在什麼時刻？(4) 4秒末的位置 (5) 4秒內的平均速度 (6) 4秒內的平均速率。

國立台東高中

10