Chapter 1 直線運動

❑導讀

物理學中最基層的部分是力學，而力學主要建立在三個基本量上，分別是：空間、時間、質量，本章主要探討時間與空間這兩個運動學要用到的基本量，爲下一章作準備；

在本章中所有的空間與時間指的都是在非相對論之下的情形，大家有興趣可以在附錄 A 中看到一部分，看看牛頓對時間及空間的定義，而愛因斯坦用它的相對論及一些其他理論把整部力學都翻了過來，我們所學的古典力學都成了一種特例。

運動學的地位：

(1)是力學的基礎工作，運用數學式來代表物理的定義。
(2)建立速率、速度、加速度的概念，以方便後面所學。
(3)因爲是空間與時間的探討，所以要引入座標及向量的概念。

❑重點整理

1. 速率 (Speed)：單位時間內所經過的路徑長➔ $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

2. 平均速度： $\vec{v} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ 瞬時速度： $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$

3. 平均加速度： $\vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ 瞬時加速度： $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

4. 直線等加速度運動

   1st： $v = v_0 + a \cdot t$

   2nd： $S = v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} a \cdot t^2$

   3rd： $v^2 = v_0{}^2 + 2a \cdot S$

5. 自由落體：落下時間 t，落下距離爲 H
6. 鉛直上拋：初速 v0，

1-1 位移

❑運動學(Kinematics)

1. 限於研究運動的各種狀態
2. 僅討論運動體的空間與時間的關係：速度、加速度等，
3. 不涉及運動發生的原因。

動力學(Dynamics)
討論引起運動的原因，運動的本質及影響運動的各種因素。

❑質點：(爲了方便我們描述運動而定)

1. 體積遠小於所存在的空間
2. 物體本身的結構也是由質點所組成，所以質點完全視我們所需要而定
3. 簡單的想像--沒有體積卻有質量的一點

❑位置 (Position)：

1. 質點對 參考點 的空間關係
2. 以與參考點的 距離 及 方向 表示，稱爲位置向量
3. 時間與空間的函數關係：$x=x(t)$

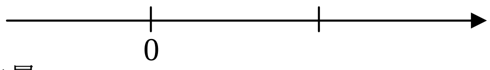
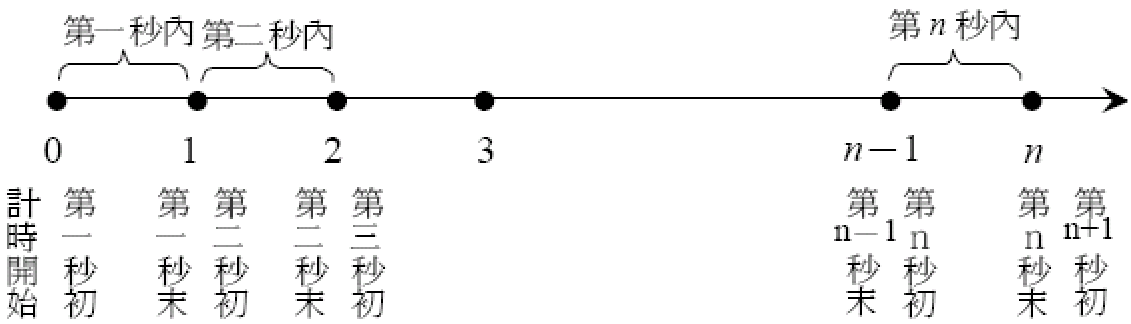


圖 1 位置爲時間的函數

❑時間坐標：用來指明事件所發生的時間

1. 時刻：事件發生的時候(某一時間點)，如第三秒，三秒末或四秒初。
2. 時距：事件經歷的長短(一段時間)，如三秒內、第三秒內。



3. 第 n 秒末：時間 t＝n 秒之瞬時
4. 第 n 秒內：(n－1)~n 秒，時距△t＝1 秒
5. n 秒內：0~n 秒，時距△t＝n 秒

❑運動與靜止的定義

1. 運動：物體的位置隨時間改變的狀態(對某一觀察者而言)
2. 靜止：物體的位置不隨時間改變的狀態(對某一觀察者而言)

3. 物體運動或靜止，視 參考座標 而定，是一個 相對的概念 不是 絕對的概念

4. 物體位置隨時間移動，可以用 x-t 圖或是方程式表示

A 線為一直線(等速度運動)方程式為

$x = v_0 \cdot t \quad \rightarrow v_0$為常數

B 線為一拋物線(等加速度運動)方程式為

$x = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow g$=常數

C 線為一曲線，表示物體進行複雜運動，方程式為

$x = x(t)$

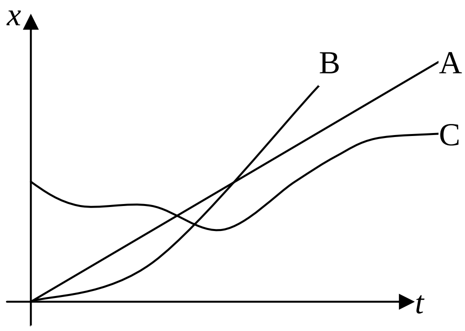


圖 2 *x-t* 圖，用來表示物體移動的情形

❑位移 (Displacement)與路徑(Path)

1. 位移 Δx ：
   - 位置的變化量➔物體由始點到終點的距離，包括 大小 及 方向 。
   - 與原點的選擇無關
   - 必為 有向線段 ，但與實際運動軌跡不一定一致
2. 路徑：又稱為路程
   - 物體實際運動軌跡之路線長
   - 可為 直線 或 任意曲線

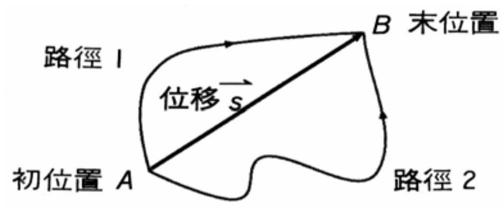


圖 3 位移與路徑的比較

位移是反映運動的結果，即位置向量的變化，它和物體所經的運動路線無關
路徑長則是指物體沿軌跡所行經的長度，它和運動的路線有關

1-2 速度與速率

❑速率 (Speed)

1. 描述物體運動的 快慢程度 之物理量，不涉及方向的物理量
2. 定義：單位時間內所經過的路徑長➔ $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
3. 單位：m/s(公尺/秒) 或 cm/s (公分/秒)

❑速度 (Velocity)

1. 具有方向的速率，簡單來說可以用來表示 物體移動的快慢 及 物體移動的方向
2. 定義：物體在單位時間內的位移

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$$

大小：由位移的大小除以時間可得

方向：$\bar{v}>0$ 物體往正 x 軸方向移動

$\bar{v}<0$ 物體往負 x 軸方向移動

速度與位移兩者同方向

3. 單位：m/s 或 cm/s

❑平均速度(Average Velocity)

1. 物體的位移與所經歷的時間之比率

$$\bar{v}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}=\frac{\bar{x}_2-\bar{x}_1}{t_2-t_1}$$

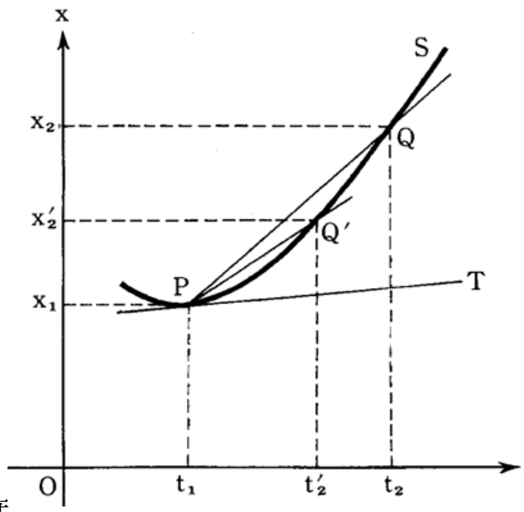


圖 4 平均速度與瞬時速度

2. 說明：

A. 代表 *x-t* 圖形上 PQ 的斜率

B. 斜率為正：平均速度為正值，方向向右

C. 斜率為負：平均速度為負值，方向向左

❑瞬時速度(Instantaneous Velocity)：

1. 在一極短時間內的位移➔極短一段間的平均速度

$$\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\quad\Rightarrow\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt}$$

說明：

A. 圖 4 中，當Δt 逐漸變小時(也就是 Q 逐漸靠近 P 時)，斜線(割線)會愈來愈逼近切線，但卻永遠不可能超過切線，

B. 當我們令Δt→0 時，就可以視為切線，也就是說瞬時速度就等於 *x-t* 圖上該點的切線斜率，方向為圖形的切線方向

C. 如果斜率一定(圖形為一條斜直線)，則代表__等速度運動__。

D. 如果斜率非固定(圖形一條曲線)，則代表__變速度運動__。

1-3 加速度

❑加速度(Acceleration)：

1. 定義：在單位時間內物體的速度變化量

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\overline{v_f}-\overline{v_i}}{t_f-t_i}$$

2. 加速度的大小由__速度變化大小__除以__時距__可得到

3. 加速度方向(以正、負表示)決定於末速度減初速度，與__初速度的方向__無關

4. 單位：__m/sec^2__、__cm/sec^2__、

❑速度與加速度的關係

1. 加速度方向決定速度的改變情況
   - 加速度與速度同方向➔將使速度的大小 增加
   - 加速度與速度反方向➔將使速度的大小 減少
2. 加速度的大小決定速度 增加 或 遞減 的快慢程度

❑平均加速度(Average Acceleration)

1. 物體運動時，每單位時間內的速度變化量

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\overline{v_f}-\overline{v_i}}{t_f-t_i}$$

2. 平均加速度只考慮始末兩點的速度，不考慮中間過程，
3. 是 v-t 圖中始末兩點連線的斜率。

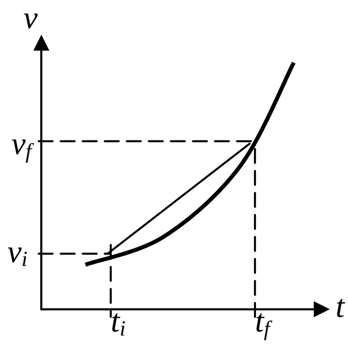


圖 5 平均加速度

❑瞬時加速度(Instantaneous Acceleration)

1. 極短時間內的平均加速度

$$\bar{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}\quad\Rightarrow\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

2. v-t 圖中，某一點的切線斜率

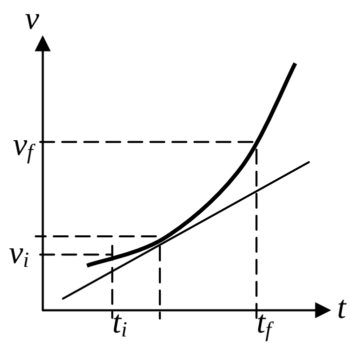


圖 6 瞬時加速度

範例演練

例題1：基礎題

令狐沖展輕功上恆山看儀琳小妹妹，上山速率為 6 km/hr，下山速率為 12 km/hr，往返一趟，求：(1)平均速度大小 (2)平均速率。

類題：假日登山，上山速率 v，下山(循原路)速率 3v，則全程平均速率為何？答：$\frac{3}{2}$v

例題2：時間與位移、速度的關係

人自某位置出發，先向東走 30 m，又向北走了 40 m，此人最後距出發點的位移爲何？若此人向東走 10 秒，向北走了 8 秒，則全程之平均速度爲多少 m / sec

解：

類題：一火車以 60 公里/小時之速度行駛 0.52 小時，以 30 公里/小時之速度行駛 0.24 小時，又以 70 公里/小時之速度行駛 0.71 小時，則此行程之平均速率約多少

例題3：平均加速度

棒球以 35 m/s 的水平速度飛向打擊者，打者揮棒將其以 45 m/s 的速度反向擊出，若球與棒的接觸時間爲 0.04 s，則球所受平均加速度值爲何？

類題：一直線上運動的物體，其速度在 10 秒內由向東 2m/s 變成向西 8m/s，則物體在這段時間內的平均加速度大小______m/s^2

例題4：綜合題

手錶的秒針長 2cm，求該針尖在 0 秒至 15 秒內的：(1)平均速度。 (2)平均速率。(3)平均加速度。

解：

課後練習題

1. 自強號火車欲由台南至高雄，先以速率 v 行全程之 1/3，欲使全程平均速率爲 2v，求餘程之速率應爲多少？

2. 小明身高 180 cm，他雙手捧籃球鉛直向上拋出，球過頭頂瞬間離手。3.0 秒後籃球落地反跳後又被他接住，若球上升的最高點離地面 12.0 m，手接球點離地面 90 cm，求球之
(1) 總位移 (2)運動總路徑長 (3)平均速度 (4)平均速率

2. 甲與乙同時由早上六點出發，各從自己住處奔向對方的住處，已知兩人中午十二點時相遇，而且甲於下午四點抵達目的地，假設兩人所行路徑相同且均爲等速度運動，則乙於何時抵

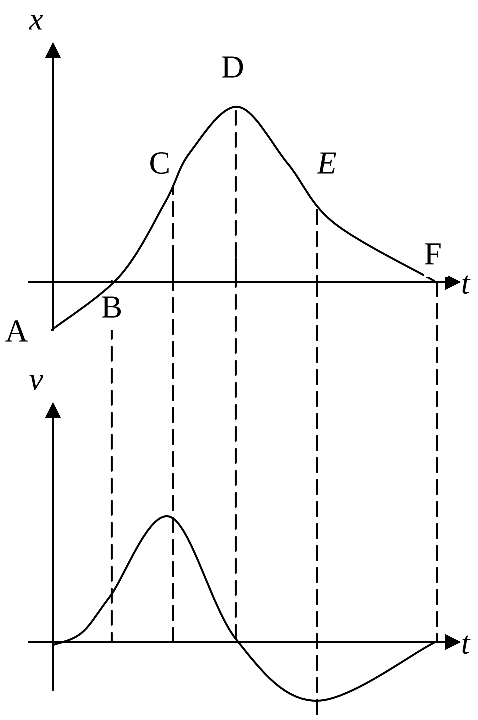
達目的地？

4.甲、乙兩人玩百米賽跑比賽，甲抵終點時，乙跑了 90 米。再比一次時，甲於起跑線後方 10 米處起跑，假設其餘條件與第一次比賽相同，則第二次比賽誰贏？

答案
答：1. 4v　　2.(1) 0.90m，向下 (2) 23.10m　(3) 0.30m/s，向下　(4) 7.70m/s

❑函數圖形與運動學之關係

斜率的意義：*x*-*t* 圖➔*v*-*t* 圖



A 點：

B 點：

C 點：

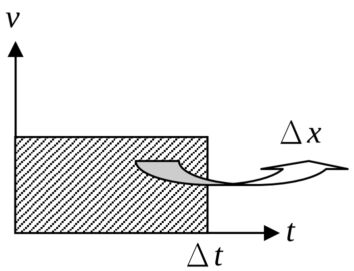
D 點：

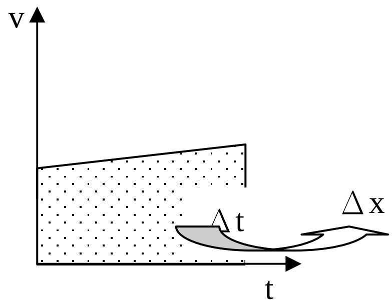
E 點：

F 點：

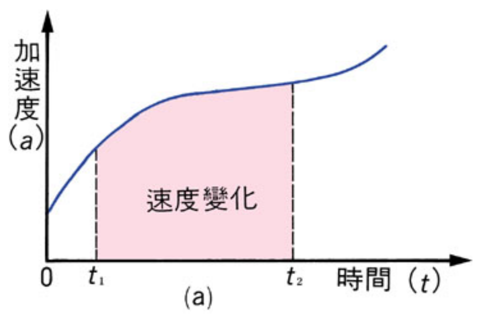
面積的意義

因爲Δx=vΔt，所以 v-t 圖中曲線與 t 軸所夾的面積爲位移，若在 t 軸上方則位移爲正，若在 t 軸下方則位移爲負。





加速度與時間關係圖(a-t)圖

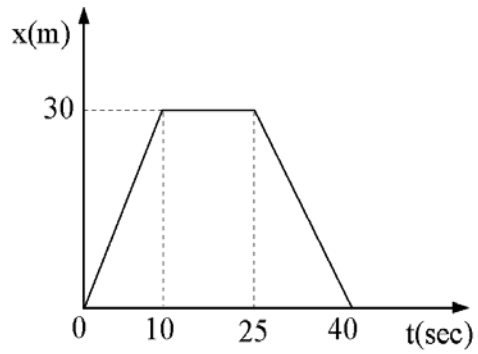


(a)

範例演練

例題5：x-t 圖

請由下圖回答下列各問題：



(1)最初 10 秒內之平均速度爲何？

(2)最初 20 秒內之平均速度爲何？

(3) 10～25 秒物體之瞬時速度爲何？

(4)第 5 秒物體瞬時速度爲何？

(5)第 30 秒物體瞬時速度爲何？

(6) 40 秒內平均速度爲何？

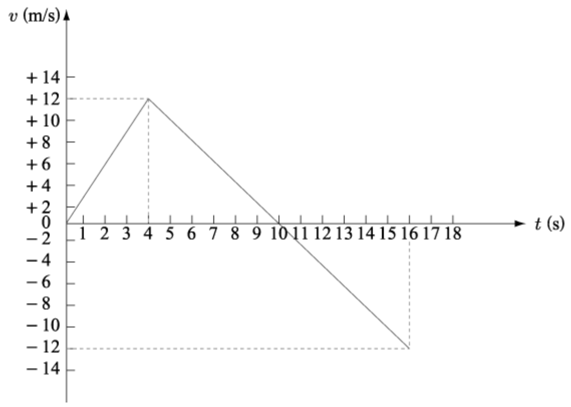
(7) 40 秒內平均速率爲若干？

(8) t 爲多少秒時，物體又返回原點？

解：

例題6：v-t 圖

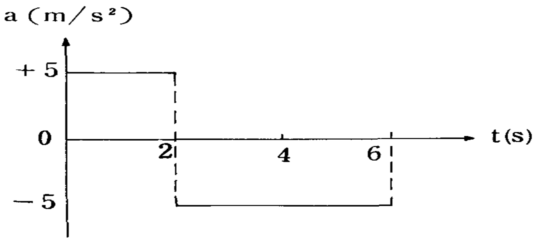
下圖爲一直線運動體的$v-t$函數圖形，若$t=0$時物體的位置$x_0=+10\text{m}$，試求(A)0～4s內的加速度，(B)第6秒時的速度，(C)第10秒時物體的位置，(D)16秒內之平均速度，(E)16秒內之平均速率。



解：

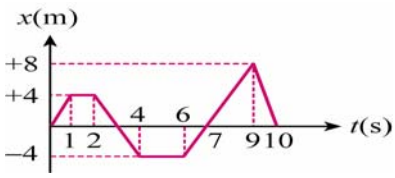
例題7：a-t 圖

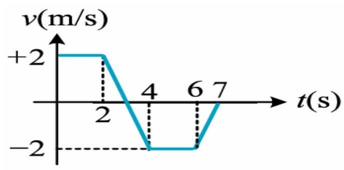
某物作直線運動之質點的 a-t 圖如右若 t＝0 時，速度為 –2 m/s，求：(1)第 2 秒時之速度　(2)第 6 秒時之速度

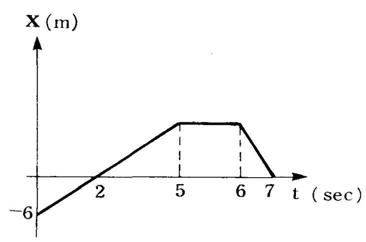


課後練習題

1. 一直線運動質點的 x-t 圖如右，則 (A)開始運動後，共經過原點 3 次 (B)1～2(s)為靜止 (C)0～7(s)的平均速度為＋4(m/s) (D)0～3(s)的位移為零 (E)0～7(s)的路徑長為 20(m)。
2. 某質點的速度與時間關係圖如右所示，已知質點在第 4 秒的位置為＋12 公尺，則(A)出發點的位置為＋8 公尺 (B)出發點的位置為＋16 公尺 (C)運動全程改變 2 次方向 (D)全程的位移為－1 公尺 (E)全程的平均速率為 2 公尺／秒。
3. 右圖為一質點在x軸上運動的位置與時間關係圖，求：(1) 5 秒內平均速度　(2)第 7 秒內平均速率　(3) 7 秒內平均速度







答案

答：1.(A)(B)(D)　2.(A)(D)　3.(1) 3 m/s　(2) 9 m/s　(3) $\frac{6}{7}$ m/s

❑導函數

1. 定義：假設原函數關係式 $f(x)$，而 $f'(x)$ 為另一函數，若在 $f(x)$ 之定義中之任一點 $x=a$ 處之導數恰為 $f'(a)$，則稱 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的導函數

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

2. 記號：$f(x)$ 的導函數通常表示成 $f'(x)$ 或 $\dfrac{d\ f(x)}{d\ (x)} = \dfrac{d}{dx} \cdot f(x)$

3. 第 n 階導函數

- 第一次導函數➔ $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$
- 第二次導函數➔ $y'' = f''(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \Rightarrow y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$
- 其他依序類推

4. 可微分：由 $f(x)$ 求 $f'(x)$ 的計算過程，我們稱為將**函數** $f(x)$ **微分**

5. **多項式**：$f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot a x^{n-1}$

❑導函數在運動學中的應用

$$x = f(t) \underset{\text{反導函數 (升階)}}{\overset{\text{導函數 (降階)}}{\rightleftarrows}} v = \frac{d\ f(t)}{d\ t} \underset{\text{反導函數 (升階)}}{\overset{\text{導函數 (降階)}}{\rightleftarrows}} a = \frac{d\ v}{d\ t} = \frac{d}{d\ t} \cdot \frac{d\ f(t)}{d\ t} = \frac{d^2\ f(t)}{d^2\ t}$$

1. $\mathrm{x(t)} \xrightarrow[\text{求切線斜率}]{\text{微分}} \mathrm{v(t)} \xrightarrow[\text{求切線斜率}]{\text{微分}} \mathrm{a(t)}$

2. $\mathrm{a(t)} \xrightarrow[\text{求面積}]{\text{積分}} \mathrm{v(t)} \xrightarrow[\text{求面積}]{\text{積分}} \mathrm{x(t)}$

運動狀態 / 函數	等速度運動	等加速度運動
x (t)	$\mathrm{x = x_0 + v_0 t}$	$\mathrm{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$
v (t)	$\mathrm{v = v_0}$(定值)	$\mathrm{v = v_0 + at}$
a (t)	$\mathrm{a = 0}$	$\mathrm{a} =$ 常數

範例演練

例題8：多項式微分-基本題

運動的位置與時間關係爲 $x(t)=5+4t-2t^2$(MKS 制)，求：(1)初速度　(2)加速度　(3)最遠的正向位置爲何？在什麼時刻？(4) 4 秒末的位置　(5) 4 秒內的平均速度　(6) 4 秒內的平均速率。

$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\to\frac{dx(t)}{dt}=4-4t$ ➔初速度：代表時間爲 0 的速度➔$v(0)$=4-0=4(m/s)

$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\to\frac{dv(t)}{dt}=-4$ ➔加速度：-4(m/s)

$x(t)=5+4t-2t^2=-2(t-1)^2+3$　最遠距離 x=3 在 t=1(s)達到

4 秒末的位置➔ $x(t)=5+4t-2t^2=5+4\cdot4-2\cdot4^2=-11$

平均速度 $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-11}{4}$

類題：已知位置與時間關係爲 $x=3t^2-6t+5$(M.K.S 制)，何時距原點最近？此距離是多少？

課後練習題

1. 某質點運動位置與時間關係式爲 $x(t)=-3t^2+6t+2$(x：米，t：秒)，求：第2秒內位移　(2)3秒內平均速率
2. 某直線運動質點位置與時間關係式爲 $x(t)=6t-t^2$ (x：米，t：秒)求：(1)速度與時間關係式　(2)運動方向何時發生改變　(3)首3秒內的平均速度　(4)加速度與時間關係式　(5)6秒內平均加速度
3. 一物體在直線上運動之位置(x)－時間(t)函數關係爲 $x=2+4t-t^2$，x之單位爲米，t之單位爲秒，求此物體前4秒內之平均速率爲？

答案
1.(1)－3 m　(2)5 m/s　2.(1)v=6－2t　(2)第3秒　(3)3 m/s　(4)a(t)=－2　(5)－2 m/s^2　3. 2 m/s

1-4 直線等加速度運動

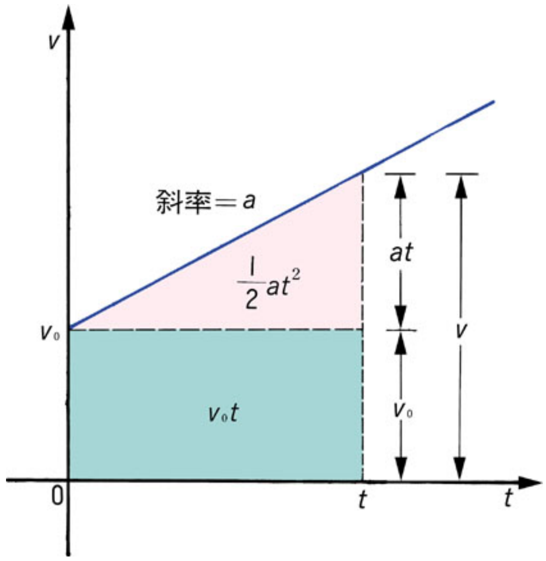
❑直線等加速度運動

1. 物體移動時候，速度等量加減
2. 公式：

1st： $v = v_0 + a \cdot t$

2nd： $S = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

3rd： $v^2 = {v_0}^2 + 2a \cdot S$



基本條件：

1. 加速度方向及大小一定，不隨時間而變
2. 初速度平行加速度方向

v-t 圖中的斜率 $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$

$$\frac{v - v_0}{t} = a \Rightarrow v = v_0 + a \cdot t$$

v-t 圖中的面積爲位移 Δx

$$S = \frac{1}{2}(v + v_0) \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

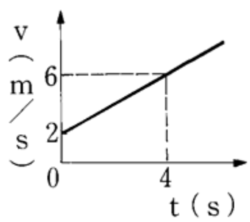
消去 t： $v^2 = v_0^2 + 2a \cdot S$

範例演練

例題9：

正常人駕駛汽車時，以 15(m/s)行駛時，安全煞車距離爲 30(m)；以 20(m/s)行駛時，安全距離爲 50(m)，則 (1)正常人的反應時間爲何？ (2)汽車的加速度爲何？

解：(1)0.5(s)　(2)－5(m/s^2)



類題：如下圖，描述汽車在直線上運動之 v-t 圖，則汽車在 4 秒內的

(1)位移爲______m　(2)平均速度爲______m/s

例題10：追逐問題

在一直線的高速公路上，有甲、乙兩車正以等速度行駛，甲車的速度為 80 km/hr ，乙車落在甲車之後 5 公里處，正以 100 km/hr 的速度追趕甲車，則趕上甲車需費時______小時。

解：

類題：一步行者以 8 m/s 之速度在一直線道路上追趕一輛同向行駛而被紅燈所阻之靜止公車，當他距公車 30 公尺時，交通燈改變，公車以 2 m/s^2 加速度駛去，則人車之最短距離為______米。答：14

例題11：綜合題

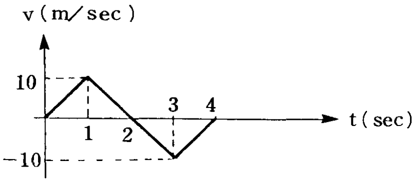
火車以等加速度行駛。其前端通過車站某一點時，速率為 u，後端通過速率為 v。火車中點通過該點時速率 w 應為______。

解：

類題：某人以 6m/s 等速追趕停在路旁之車，當他距車 25m 時，車突然向前以 1m/s^2 等加速度開車，求人車最近距離為______m。

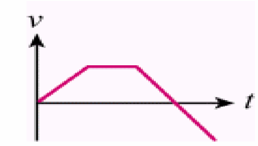
課後練習題

1. 某質點作直線等加速度運動，每秒拍照 100 次，在照片中發現某相鄰兩點距為 0.1 米，次相鄰兩點相距 0.2 米，求此物加速度大小。
2. 一質點自靜止作等加速度直線運動，第 10 秒內的位移比第 9 秒內多 10 公尺，求：第 10 秒內的位移若干？ (2)加速度若干？ (3)第 10 秒末的速度為何？
3. 右圖為一物在x軸上運動的v-t圖，若初位置x＝3米，繪出其x-t圖。

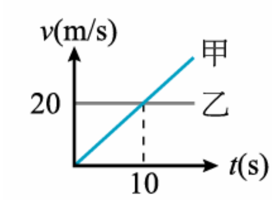


4. 一質點在t=0時在原點靜止起動，首3秒的加速度均為+4.0 m/s^2，其後3秒的加速度為－6.0

m/s^2，試繪出其a-t；v-t及x-t函數圖形。



5. 某物沿一直線作等加速度運動，在其速度由 v 變為 $-v/3$ 的時距內，其平均速度值與平均速率的比值為何?
6. 一物體從靜止開始作直線運動，已知該物體先以 2公尺／秒^{2}的等加速度運動，接著以等速運動 5秒後，再以 -2公尺／秒^{2}的加速度減速到停止。若全程運動的距離為100公尺，則此物體運動過程的最大速率為________公尺／秒；全程的總時間為_________秒。
7. 火車沿直線鐵道靜止於*A*站，以$+a$之加速度出發，到*B*站後，以等速 v 行駛至*C*，然後做 $-a$加速度停於*D*，若站間等距，則行駛全程歷時多久？
8. A、B兩車速率各為36km/hr及72km/hr，A車在前，相距20m，B以等減速度$2m/s^2$ 減速，求是否相撞，若相撞何時相撞？
9. 若甲乙兩物在同一直線上運動，其位置x(米)與時間t(秒)的關係各為$x(t)=8t+10$與$x(t)=2t^2$，則兩物會不會相撞?若會，則何時相撞?若不會，則最近距離為何?
10. 甲火車長300米，在鐵軌上等速40m/s行駛，乙火車長100米，靜止在另一平行鐵軌上，當甲火車尾超過乙火車頭時，乙火車由靜止以加速$2m/s^2$ 起動，且當速度為60m/s後便以等速行駛，則幾秒後乙火車尾超過甲火車頭?
11. 甲、乙兩車在直線道路上同向行駛。已知開始時乙車領先甲車96公尺。若兩車的速度－時間圖如右。則 (1)甲、乙兩車在10秒內的位移量值之比為何？ (2)甲車經過幾秒後，才能追上乙車？



12. 28.一直線運動質點的位置 x 與時間 t 的關係為 $x=-t^2+2t$(單位：SI 制)則 (1)畫出 x-t 圖。 (2)質點於第幾秒時方向發生改變？ (3)質點於前 4 秒內移動的路徑長為何？

答案
1. 1000 m/s^2　　2.(1)95m　(2)$10m/s^2$　(3)100m/s 6. $\frac{4}{5}$　　7. 10，15　　8. $\frac{5V}{2a}$　　9. $5-\sqrt{5}$ 秒時會相撞　　9.會相撞，t=5秒時相撞 10. 65秒　　11. 8秒　　12. (1) 1：2　(2) 24　　13. (2)1秒，(3)10公尺

1-5 特例的直線加速度運動

❑自由落體：特殊的直線加速度運動

物體從靜止狀態$v_0 = 0$，受重力吸引自某高度h加速落下

落地時間t

由式 $h = \frac{1}{2}gt^2 \to t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

落地瞬間的瞬時速v度大小

$v = gt = \sqrt{2gh}$

❑鉛直上拋

1. 以初速v_0鉛直向上拋出，因受重力吸引，當達到一最大高度H後，開始落下
2. 定方向向上爲正，則 $a = -g$

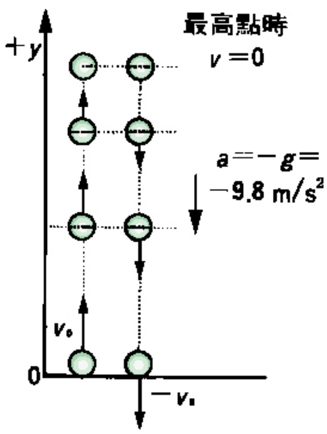


圖 7 鉛直上拋

1. 質點運動方程式

$(a)\ v = v_0 - gt \quad (b)\ y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (c)\ v^2 = v_0^2 - 2gy$

2. 上升達最大高度H時，速度爲零，時間t

由(a)→ $\therefore 0 = v_0 - gt \Rightarrow t = \frac{v}{g}$

由(c)→ $\therefore 0 = {v_0}^2 - 2gH \Rightarrow H = \frac{{v_0}^2}{2g}$

3. 上升距離=下降距離

落下時間=上升時間➔全程運動： $T = \frac{2v}{g}$

範例演練

例題12：自由落體運動【84 推甄】

如圖所示，小明手持米尺，使米尺下端零點位於小華拇指與食指之間。小華一看到小明鬆手，就立即抓握米尺，結果米尺落下 20 公分。若重力加速度爲 10 米／秒 ^{2}，則小華的反應時間約爲多少秒? (A)0.2 (B)0.02 (C)2 (D)20

類題：若不計空氣阻力，一物自高 h 處自由落下，須費時多久？______。落地前瞬間的速率爲______。

例題13：鉛直上拋

在地面上以初速度 20m/s 鉛直上拋一石頭，若不計算空氣阻力的影響，則下列敘述何者正確？($g = 10m/s^2$)　(A)石頭到達最高點需費時幾秒　(B)石頭最高離地多少公尺　(C)到最大高度一半路程時的速率爲多少

♦解題概念

列出已知數與未知數

v_0	v	a	t	s
20	0	-10	?	?

♦詳解：

達到最大高度需要 t 秒，最大高度爲 h

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 0 = 20 + (-10) \cdot t \Rightarrow t = 2(s)$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a \cdot S \Rightarrow 0 = 20^2 + 2(-10) \cdot h \Rightarrow h = 20(m)$$

達到一半路程時候的速率爲 v

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a \cdot S \Rightarrow {v_2}^2 = 20^2 + 2(-10) \cdot 10 \Rightarrow v_2 = 10\sqrt{2}(m/s)$$

類題：某物體以 V_0 之初速作鉛直上拋，當它的速度變成 $2V_0$ 向下時，如附圖，歷時______。(重力加速度爲 g)

例題14：綜合題

一棒球發球機以每秒 19.6 公尺的初速把一棒球垂直往上發射。當球達到最高點時，發球機又以同樣的初速往上發射第二個球。($g = 9.80$ 公尺 / 秒 ^{2})

(1)第一球發射後，最高點離發球機多高？ (2)到達最高點需多少時間？

(3)如兩球在空中相撞，第二個球由發射到相撞需多少時間？ (4)此時兩球離發球機多高？

解：(a)19.6 公尺；(b)2 秒；(c)1 秒；(d)14.7 公尺

類題：有一小石子自塔頂落下 a 公尺後，另一小石於離塔頂下方 b 公尺處自由落下，結果兩石同時著地，則塔高爲若干(公尺)？(但 $b > a$) 答：$h = \dfrac{(b+a)^2}{4a}$

課後練習題

1. 高度差爲14.7公尺的甲球與乙球，同時靜止自由落下，若甲球比乙球遲一秒鐘落地，則甲球原來的高度爲何？($g=9.8m/s^2$)
2. 塔頂一靜止下落之自由落體，已知最後兩秒內落下的高度塔高的8/9，試求：(1)落地時間 (2)塔高 ($g=9.8m/s^2$)
3. 一球由高處自由落下，在落地前最後1秒，其位移爲全程位移的 $\dfrac{1}{4}$，則小球下落的總時間爲何？($g＝10m/s^2$)
4. 一石 p由頂樓自由下落距離 a後，石子 q始由頂樓下方距離 b處靜止下落。若兩石同時著地，則頂樓的高度爲何？
5. 物體以初速 v 被鉛直上拋，重力加速度 g，則自拋出上升到最大高度的一半處，所需時間爲何？
6. 若一網球從 5公尺高度由靜止落至地面，反彈至 1.25公尺的高度，若球與地面的接觸時間爲 0.010秒 (重力加速度 $g＝9.8\ m/s^2$)，則球在接觸時的平均加速度值爲何？
7. 一石由頂樓向上鉛直拋出，其拋出速度爲40(m/s)。已知頂樓的高度爲100(m)，則該石子經過多久落地($g＝10m/s^2$)？
8. 某物體從39.2米高的建築物頂端靜止自由落下時，地面有一石子同時以19.6m/s的初速鉛直上拋，則兩者相遇的時間及高度爲何？($g＝9.8m/s^2$)
9. 球自高 H 處自由落下，另一石同時自地面以初速 v_0 鉛直上拋，結果球與石同時著地，則H 應爲何？
10. 升降機內有一螺絲釘自高2.45米的天花板自行掉落至地板上，試求下列各情況下掉落的時間：(1)升降機靜止 (2)升降機等速下降 (3)升降機以$4.9m/s^2$等加速度上升 (4)升降機以$4.9m/s^2$等加速度下降($g＝9.8m/s^2$)
11. 設一電梯以等加速度 a 垂直上升，其內有乘客於 $t＝0$ 時，將一原靜止於其手中、距離電

梯地板爲 h 的物體釋放，重力加速度 g，試求此物體抵達電梯地板之時刻？

12. 一氣球自地面由靜止以 $\frac{g}{8}$ 的加速度上升，g爲地表之重力加速度，4秒後由氣球上落下一小石子，再經幾秒後小石子會落地？

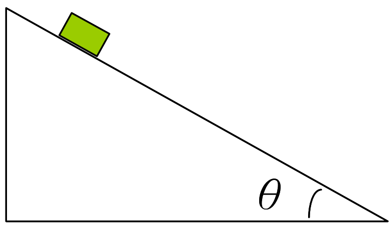
13. 小明乘坐熱氣球由地面以等速度12(m/s)上升。當熱氣球到達離地32(m)處，小明將手中的一只木箱靜止釋放，此後熱氣球即以加速度2(m/s^2)上升，則當木箱著地時，小明的離地高度爲________(m)，熱氣球當時的速度爲__________m/s。(令g＝10m/s^2)

答案
1. 19.6m　2.(1)3秒　(2)44.1m　3. 4＋2$\sqrt{3}$秒　4. $\frac{(a+b)^2}{4a}$　5. $\frac{(2-\sqrt{2})v}{2g}$
6. 1.48×10^3 m/s^2　7. 10 (s)　8. 2s；19.6m　9. $\frac{2{v_0}^2}{g}$
10.(1)0.71s　(2)0.71s　(3)0.58s　(4)1s　11. $\sqrt{\frac{2h}{(g+a)}}$　12. 2s　13. 96，16

❑沿光滑斜面之等加速度運動

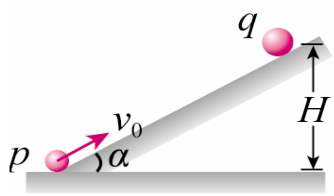
1. 物體在光滑鞋面上的運動爲等加速度直線運動，
2. 斜面的傾斜角如爲 θ ，則加速度的大小爲 g sin θ 。
3. 如以斜面方向爲 x 座標，斜上爲正，斜下爲負

$$\begin{cases} v = v_0 - (g\sin\theta)t \\ \Delta x = v_0 t - \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 \\ v^2 = v_0^2 - 2(g\sin\theta)\Delta x \end{cases}$$



課後練習題

1. 有兩質點p、q同時開始運動，已知質點 p沿著光滑斜面自由下滑；質點q則自由下落，如圖。則 p、q兩球著地時間的比值為何？
2. 有 p、q 兩球在傾斜角為 α 的光滑斜面上，已知 p 球以速度 v_0 由底端上滑，而 q 球則從頂端自由下滑。今兩球同時運動，若兩球在 p 的出發點相遇，則 v_0 之值為__________；兩球相遇的時間為__________。



3. 一木塊以速度 v_0 由斜面底端上滑，當該木塊再度滑回出發點時，當時的速率為 $\frac{v_0}{2}$，則該木塊上滑與下滑的時間比為何？；該木塊上升與下降的加速度量值之比為何？
4. 一物體從光滑斜面底部以初速度 V(m/s) 沿斜面上滑，經 $2t$ 秒後又滑回斜面底部；若將此一質點由斜面頂端靜止自由下滑，必須花費 $4t$ 秒，則此斜面長度為何？(以V、t表示之)

答案
1. $\frac{1}{\sin\alpha}$　2. $\sqrt{\frac{gH}{2}}$，$\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2H}{g}}$　3. 1：2 ，4：1　4. 8Vt(m)

1-6 相對運動

挪至 Chapter 2 平面運動